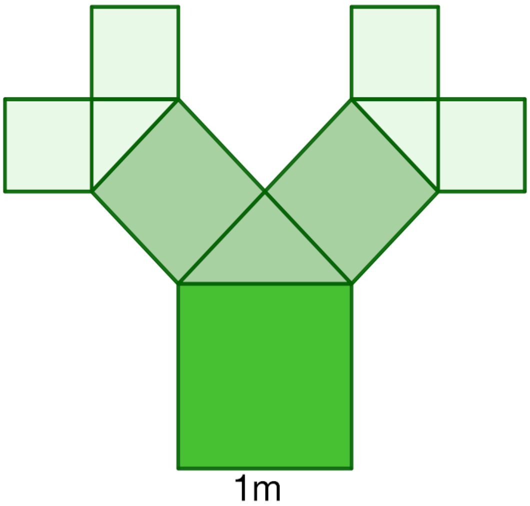
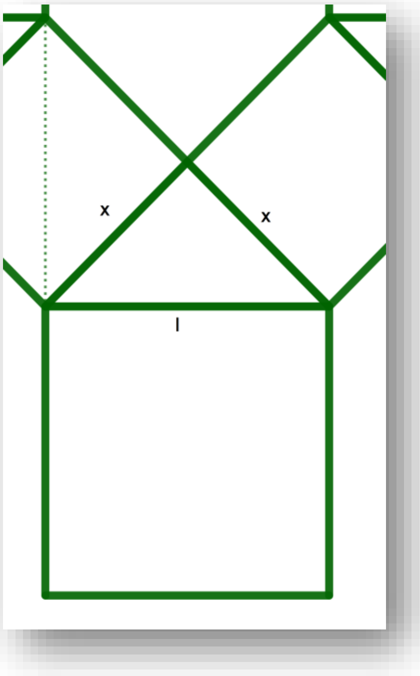
Árbol pitagórico

Durante su primer año de vida, el árbol pitagórico solo crece por su tronco, que es un cuadrado. Durante su segundo año de vida, un triángulo rectángulo isósceles crece en la parte superior del tronco, de manera que la hipotenusa del triángulo coincide con el lado superior del cuadrado.
De los catetos de ese triángulo emergen las dos primeras ramas, también de forma cuadrada. Este patrón de crecimiento se repite cada año, como muestra la figura adjunta, en la que se ha representado un árbol pitagórico de tres años. Considera que el tronco (es decir, el primer cuadrado) tiene 1 m de lado y calcula la altura del árbol a los 4 y a los 16 años.





SOLUCIÓN

Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar x que es el lado del cuadrado del "año siguiente"

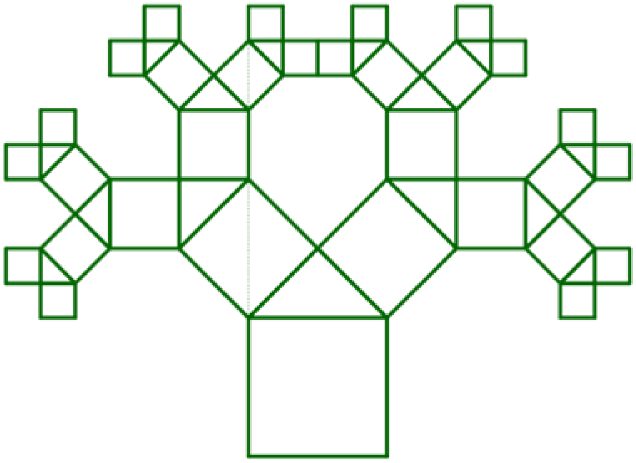
$$l^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow l^2 = 2x^2 \Rightarrow x = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

La diagonal del "cuadrado del año siguiente" mide lo mismo que la longitud del lado cuadrado del año como puede deducirse de la figura.
Del cálculo anterior observamos que las longitudes de los lados de los cuadrados siguen una progresión geométrica de razón

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$, como el lado del hexágono es igual al radio del círculo grande se tiene

Al ir creciendo el árbol, observamos en la imagen que cada 2 años crece la altura de un cuadrado más la diagonal de otro que mide lo mismo que el lado del primero. Además, cada 2 años el crecimiento se reduce en un factor $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$



Con todos los resultados anteriores creamos la siguiente tabla

Ya tenemos la altura alcanzada al cuarto año, para obtener la altura alcanzada al cabo de 16 años, tenemos en cuenta que cada 2 años los crecimientos son los términos de una

Año	crecimiento en el año	Altura alcanzada
1º	1 lado del cuadrado	1
2º	1 diagonal del cuadrado	$1+1=2$
3º	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ lado	$2+\frac{1}{\sqrt{2}}$
4º	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ diagonal	$2+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=2+\frac{2}{\sqrt{2}}$
5º	$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ lado	$2+\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}$
6º	$\frac{1}{2}$ diagonal	$\frac{5}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}=3+\frac{2}{\sqrt{2}}$

progresión geométrica de razón $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ y tenemos que hallar la suma de los 8 primeros términos (cada 2 años es un término de la progresión)
La suma es de los n términos de una progresión geométrica es

$$S_n=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}=\frac{2\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8-1\right]}{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}=\frac{30+15\sqrt{2}}{8}$$

Esta cantidad es la altura alcanzada por el árbol pitagórico al cabo de 16 años.
También podría haberse hecho sin la fórmula, sumando los crecimientos cada dos años

$$2+\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{2}+\frac{2}{2\sqrt{2}}+\frac{2}{4}+\frac{2}{4\sqrt{2}}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8\sqrt{2}}=\frac{16\sqrt{2}+16+8\sqrt{2}+8+4\sqrt{2}+4+2\sqrt{2}+2}{8\sqrt{2}}$$

$$=\frac{30\sqrt{2}+30}{8\sqrt{2}}=\frac{30+15\sqrt{2}}{8}$$